Correction S1B1 DP

Exercice 1 : autour du cours et du TD

Les deux questions sont indépendantes.

1. *Dans une classe de* 40 *élèves,* 25 *parlent couramment l'anglais,* 11 *parlent couramment l'espagnol et* 6 *ne parlent ni anglais, ni espagnol.*
   Par la suite, on note C l'ensemble des élèves de la classes, A l'ensemble de ceux qui parlent anglais et E l'ensemble de ceux qui parlent espagnol.

   (a) *Traduire les données de l'énoncé à l'aide des* 3 *ensembles.*

   On a $\text{Card}(C) = 40$, $\text{Card}(A) = 25$, $\text{Card}(E) = 11$ et $\text{Card}(\overline{A} \cap \overline{E}) = 6$ où $\overline{A} = C \setminus A$ (de même pour $\overline{E}$).

   (b) *Combien y a-t-il d'élèves qui parlent couramment à la fois l'anglais et l'espagnol ? On vous demande de justifier votre résultat à l'aide de formule(s) du cours que vous rappellerez.*

   On cherche $\text{Card}(A \cap E)$.

   On sait que $\text{Card}(A \cup E) = \text{Card}(A) + \text{Card}(E) - \text{Card}(A \cap E)$.

   Ainsi, $\text{Card}(A \cap E) = \text{Card}(A) + \text{Card}(E) - \text{Card}(A \cup E) = 25 + 11 - \text{Card}(A \cup E)$.

   Or, $\overline{A} \cap \overline{E} = \overline{A \cup E}$. Ainsi, $\text{Card}(A \cup E) = \text{Card}(C) - \text{Card}(\overline{A \cup E}) = \text{Card}(C) - \text{Card}(\overline{A} \cap \overline{E}) = 40 - 6 = 34$.

   Par conséquent, $\text{Card}(A \cap E) = 25 + 11 - 34 = 2$.

2. *Autour du binôme de Newton*

   (a) *Énoncer la formule du binôme de Newton.*

   $\forall\, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

   (b) *Application : soit E un ensemble à n éléments.*

      i. *Combien y a-t-il de sous-ensembles de E à k éléments ?*

      Il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de E à k éléments.

      ii. *En utilisant les questions précédentes (2.(a) et 2.(b)(i)), calculer le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.*

      Pour $k \in [\![0, n]\!]$, notons $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de E à k éléments. Ces ensembles forment une partition de $\mathcal{P}(E)$.

      Ainsi, $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}_0(E) \sqcup \mathcal{P}_1(E) \cdots \sqcup \mathcal{P}_n(E)$.

      D'où, $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \text{Card}(\mathcal{P}_k(E)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k . 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$ par la formule du binôme de Newton.

Exercice 2 : dénombrement 1

Un QCM comporte 5 questions. Pour chacune des 5 questions, il y a 6 propositions de réponses : A, B, C, D, E ou F. Pour chaque question, il n'y a qu'une seule réponse correcte.

On suppose qu'un candidat passant ce qcm répond à toutes les questions posées en écrivant un « mot réponse » de 5 lettres prises parmi A, B, C, D, E et F.

Par exemple, le mot réponse « BBADC » signifie que le candidat a répondu B aux questions 1 et 2, A à la question 3, D à la question 4 et C à la question 5.

Sauf mention contraire dans la question, le mot réponse peut avoir plusieurs fois la même lettre.

1. *Combien y a-t-il de mots réponses possibles ? Justifier brièvement.*

   Il y a 6 possibilités de « lettres réponses » pour la question 1 ainsi que pour les autres questions.

   Ainsi, il y a 6^5 mots réponses possibles.

2. *Combien y a-t-il de mots réponses n'ayant que des lettres distinctes ? Justifier brièvement.*

   Si les lettres sont distinctes, il y a 6 possibilités pour la question 1 ; puis 5 pour la question 2, ainsi de suite.

   Il y a donc $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$ mots réponses dans ce cas là.

3. *Combien de mots réponses possibles ne contenant qu'une seule réponse correcte y a-t-il ? Justifier brièvement.*

   Imaginons que la seule bonne réponse du candidat est à la question 1. Il n'y a qu'une seule façon d'y répondre. Ensuite, il a faux aux questions 2, 3, 4 et 5 (pour ces questions, il n'a donc pas noté la bonne lettre !). Dans ce cas, il y a $1 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ mots réponses possibles.

   Comme il y a 5 questions en tout, il y a en tout $5 \times 1 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5$ mots réponses possibles dans ce cas.

4. *Combien de mots réponses avec au moins une réponse correcte y a-t-il ? Justifier brièvement.*

   Il y a 5^5 mots réponses sans aucune réponse correcte (pour chaque question, le candidat n'a pas écrit la bonne lettre).

   Ainsi, il y a $6^5 - 5^5$ mots réponses avec au moins une réponse correcte.

5. *Combien de mots réponses commençant par E, sans A et composés de lettres distinctes y a t-il ? Justifier brièvement. Faire le calcul jusqu'au bout.*

   Il n'y a qu'une seule façon de répondre à Q1 (lettre E). Pour Q2, il y a 4 façons (car on ne veut pas d'autres E, ni de A). Pour Q3, il y a 3 façons (pas de E, pas de A et la lettre mis en Q3). Il y a 2 façons pour Q4 puis 1 pour Q5.

   Au total, il y a $1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ mots réponses dans ce cas.

6. *Il y a eu des fuites. On sait que le mot réponse contient un B, deux C et deux D. Combien y a-t-il de mots réponses possibles ? Justifier brièvement. Faire le calcul jusqu'au bout.*

   Cela revient à compter les anagrammes de $BCCDD$. Il y en a $\dfrac{5!}{2! \times 2!} = 30$.

Exercice 3 : dénombrement 2

Dans cet exercice, n est un entier supérieur à 2 et k est un entier naturel inférieur à n.

Ousmane est blessé. Pour passer le temps, il imagine un ensemble de n joueurs. Il décide alors de compter le nombre d'équipes possibles composées de k joueurs avec un capitaine parmi eux.

Pour cela, il va compter ce nombre de deux façons différentes.

- *Première façon : Ousmane choisit d'abord les k joueurs puis il choisit le capitaine parmi eux.*
- *Deuxième façon : Ousmane choisit d'abord le capitaine puis les autres joueurs.*

1. *Quel est le nombre N_1 d'équipes quand Ousmane utilise la première façon ? Justifier brièvement.*

   Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les k joueurs. Une fois ces joueurs choisis, il y a $\binom{k}{1}$ façons de choisir le capitaine.

   Donc, $N_1 = k\binom{n}{k}$.
2. *Quel est le nombre N_2 d'équipes quand Ousmane utilise la deuxième façon ? Justifier brièvement.*

   Il y a $\binom{n}{1}$ façons de choisir le capitaine. Une fois le capitaine choisi, il reste $k-1$ joueurs à prendre parmi les $n-1$ restants.

   Donc, $N_2 = n\binom{n-1}{k-1}$.
3. *Vous venez de démontrer une formule. Laquelle ?*

   $N_1 = N_2$. Donc, $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$.
4. *Redémontrer cette formule par le calcul.*

$$\begin{aligned} n\binom{n-1}{k-1} &= n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times ((n-1)-(k-1))!} \\ &= n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times (n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= k \times \frac{n!}{(k)!(n-k)!} = k\binom{n}{k} \end{aligned}$$

Exercice 4 : probabilités conditionnelles

Au restaurant « Je donne tout », on constate que 15% des clients mangent « à la carte » et 85% choisissent un menu. Parmi les clients qui mangent « à la carte », 30% prennent un dessert, contre 45% des clients qui choisissent un menu.
On note C l'événement « Le client mange à la carte », M : « Le client choisit le menu » et D : « Le client prend un dessert ».

N.B. : vous justifierez vos résultats à l'aide d'une formule du cours.

1. *On choisit au hasard un client. Quelle est la probabilité que ce client ait mangé un dessert ?*

   Vous donnerez votre résultat sous forme de pourcentage ou de fraction simplifiée

   On a $P(C) = 0.15 = \frac{3}{20}$, $P(M) = 0.85 = \frac{17}{20}$, $P(D|C) = 0.3 = \frac{3}{10}$ et $P(D|M) = 0.45 = \frac{9}{20}$. De plus, $\{C, M\}$ forme une partition : $C \cap M = \emptyset$ et $C \sqcup M = \Omega$.

   On cherche $P(D)$. Comme $D = (D \cap C) \sqcup (D \cap M)$, on a

$$P(D) = P(D \cap M) + P(D \cap C) = P(D|M) \times P(M) + P(D|C) \times P(C) = \frac{9}{20} \times \frac{17}{20} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{20} = \frac{171}{400}$$

2. *On choisit au hasard un client qui a pris un dessert. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi la formule « à la carte »*

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|C) \times P(C)}{P(D)} = \frac{\frac{9}{200}}{\frac{171}{400}} = \frac{18}{171} = \frac{2}{19}$$

Exercice 5 : cours

Soient X une variable aléatoire finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. *Rappeler les formules donnant l'espérance et la variance de X respectivement notées : $E(X)$ et $Var(X)$.*
2. *Exprimer $E(aX + b)$ en fonction de a, b et $E(X)$. Démontrer cette formule.*
3. *Exprimer $Var(aX + b)$ en fonction de a, b et $Var(X)$. Démontrer cette formule.*

Tout est dans votre cours et/ou le pdf « démonstrations à connaitre »

Exercice 6 : variables aléatoires

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

On lance un dé classique et équilibré. Si le résultat est 1, 3 *ou* 4, *on ne marque rien. Si le résultat est* 2 *ou* 6, *on marque* 1 *point. Si le résultat est* 5, *on gagne* 2 *points. On note X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus lors d'un lancer.*

1. *Donner la loi de X.*

   $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, $P(X = 0) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, $P(X = 1) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ et $P(X = 2) = \dfrac{1}{6}$.

2. *Calculer l'espérance et la variance de X.*

   - $E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{6} = \dfrac{2}{3}$.
   - $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

   On a $E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{6} = 1$. Ainsi, $\mathrm{Var}(X) = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$.

3. *Soit $Y = 2X + 1$. Quelle est la loi de Y, son espérance et sa variance ?*

   - Loi de Y : $Y(\Omega) = \{1, 3, 5\}$, $P(Y = 1) = P(X = 0) = \dfrac{1}{2}$, $P(Y = 3) = P(X = 1) = \dfrac{1}{3}$ et $P(Y = 5) = P(X = 2) = \dfrac{1}{6}$.
   - $E(Y) = 2E(X) + 1 = \dfrac{7}{3}$ et $\mathrm{Var}(Y) = 4\mathrm{Var}(X) = \dfrac{20}{9}$. (cf cours)

Partie B :

Une urne contient n boules blanches et 3 boules rouges, indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur puis on la replace dans l'urne.

1. *Déterminer n pour que la probabilité d'avoir une boule rouge soit égale à $\dfrac{3}{11}$.*

   La probabilité d'avoir une boule rouge est $\dfrac{3}{n+1}$. Il nous faut donc : $\dfrac{3}{n+3} = \dfrac{3}{11}$. D'où, $n+3 = 11$, ce qui donne $n = 8$.

2. *On suppose $n = 6$. Si la boule tirée est blanche, on marque* 1 *point, sinon on marque aucun point. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de points obtenu sur ce tirage.*

   (a) Donner la loi de Y son espérance et sa variance.

   $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ avec $P(Y = 1) = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$ et $P(Y = 0) = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$. Y suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{2}{3}$.

   Ainsi, $E(Y) = p = \dfrac{2}{3}$ et $\mathrm{Var}(Y) = p(1-p) = \dfrac{2}{9}$.

   (b) *On effectue* 8 *tirages successifs, dans les mêmes conditions. Ces tirages sont supposés indépendants. Pour $k \in [\![1, 8]\!]$, on note Y_k le nombre de points obtenus au k-ième tirage.*

   On note $Z = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_8$.

   i. Donner $Z(\Omega)$ ainsi que $P(Z = i)$ pour tout $i \in Z(\Omega)$. Vous justifierez vos résultats.

   $Z(\Omega) = [\![0, 8]\!]$. Z est la somme de 8 variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre. Elle suit donc une loi binomiale de paramètres $(8, \dfrac{2}{3})$. Ainsi

   $$\forall\, i \in [\![0, 8]\!],\ P(Z = i) = \binom{8}{i} \left(\frac{2}{3}\right)^i \times \left(\frac{1}{3}\right)^{8-i}$$

   ii. *Trouver $P(Z \leq 7)$. Simplifier le plus possible votre résultat.*

   $$P(Z \leq 7) = 1 - P(Z = 8) = 1 - \binom{8}{8} \left(\frac{2}{3}\right)^8 = 1 - \frac{2^8}{3^8}.$$